HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SINE & COSINE

Dương Trác Việt

Ngày 30 tháng 7 năm 2017

Tóm tắt nội dung

Trên cả ba phương diện tự luận, bán tự luận - điền khuyết và trắc nghiệm, bài viết đề cập quá trình tư duy, thao tác bấm máy và cách trình bày khi giải quyết các phương trình lượng giác cổ điển đối với sine và cosine.

1 Mở đầu

Xét phương trình

$$C\cos(ax+b)+S\sin(ax+b)=m. \tag{1}$$

trong đó

- C là hệ số của cos;
- S là hệ số của sin;
- m là số thực thỏa mãn $m^2 \leq C^2+S^2$*.

Nội dung tiếp theo đề cập cách giải những phương trình dạng (1) theo cả ba hình thức tự luận, trắc nghiệm khách quan và giao thoa giữa chúng. Qua đó, giúp người đọc đúc kết một số kỹ thuật máy tính tương ứng, phù hợp với mỗi hoàn cảnh kiểm tra.



2 Định hướng tự luận

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}. \tag{2}$$

* Trong trường hợp ngược lại, phương trình sẽ vô nghiệm, dẫn đến các thao tác bấm máy được đề cập ở nội dung tiếp theo có thể làm xuất hiện dòng chữ "Math ERROR".

2.1 Lời giải

2.1.1 Giải theo sine

Tư duy	Bấm máy	Trình bày
Hệ số của sine là $S=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.	Trong MODE 1, nhập $Pol\left(\sqrt{6}+\sqrt{2},\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	
Hệ số của cosine là $C=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.	bấm =.	
	Bấm ALPHA) =, máy hiện $X=4$.	Ta có
Vì tính theo sin nên $+Y$.	Bấm ALPHA S⇔D =, máy hiện $Y=\frac{1}{12}\pi$.	$(2)\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{3}$
Thu gọn biểu thức.	Bấm $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$ = $\frac{5}{12}\pi$.	$\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)=2\sqrt{3}$
Chuyển 4 qua vế phải.	Bấm $\frac{2\sqrt{3}}{4}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(\text{bao nhiêu})$?	Bấm $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ = $\frac{1}{3}\pi$.	$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$
Nhớ lại $\sin u=\sin v$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v+k2\pi,\\ u=\pi-v+k2\pi.\end{array}\right.$		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\\ \frac{3x}{2}+\frac{5\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$
Chuyển $\frac{5\pi}{12}$ qua vế phải.	Bấm $\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}$ = $\frac{-1}{12}\pi$. Bấm $\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}$ = $\frac{1}{4}\pi$.	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2}=-\frac{\pi}{12}+k2\pi,\\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$
Chia hai vế họ nghiệm thứ nhất cho $\frac{3}{2}$.	Chuyển qua MODE 2. Nhập $\left(-\frac{\pi}{12}+i\times 2\pi\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)$	
Vậy họ nghiệm thứ nhất là $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}$.	bấm =, máy hiện $-\frac{1}{18}\pi+\frac{4}{3}\pi i$	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3},\end{array}\right.$

Chia hai vế họ nghiệm thứ hai cho $\frac{3}{2}$.

Bấm

$$\left(\frac{\pi}{4} + i \times 2\pi\right) \div \left(\frac{3}{2}\right)$$

Vậy họ nghiệm thứ hai là

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3}.$$

[=], máy hiện

$$\frac{1}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi i$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right.$$

Nhớ ghi điều kiện của k.

$(k \in \mathbb{Z})$.

2.1.2 Giải theo cosine

Tư duy

Hệ số của cosine là

$$C = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

Hệ số của sine là

$$S = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

Vì tính theo cos nên $-Y$.

Thu gọn biểu thức.

Chuyển 4 qua vế phải.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\text{bao nhiêu})$?

Nhớ lại $\cos u = \cos v$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi, \\ u = -v + k2\pi. \end{array}\right.$$

Chuyển $-\frac{\pi}{12}$ qua vế phải.

Bấm máy

Trong [MODE] [1], nhập

$$Pol\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

bấm [=].

Bấm [ALPHA] [)] [=], máy hiện

$$X = 4.$$

Bấm [ALPHA] [S⇔D] [=], máy hiện

$$Y = \frac{5}{12}\pi.$$

Bấm $\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}$ [=] $-\frac{1}{12}\pi$.

Bấm $\frac{2\sqrt{3}}{4}$ [=] $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bấm $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ [=] $\frac{1}{6}\pi$.

Bấm $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$ [=] $\frac{1}{4}\pi$.

Bấm $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$ [=] $-\frac{1}{12}\pi$.

Trình bày

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 4\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + k2\pi, \\ \frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

Chia hai vế họ nghiệm thứ nhất cho $\frac{3}{2}$.

Chuyển qua MODE 2.

Nhập

$$\left(\frac{\pi}{4}+i\times 2\pi\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)$$

Vậy họ nghiệm thứ nhất là

$$x=\frac{\pi}{6}+k\frac{4\pi}{3}.$$

bấm =, máy hiện

$$\frac{1}{6}\pi+\frac{4}{3}\pi i$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{4\pi}{3}, \end{array}\right.$$

Chia hai vế họ nghiệm thứ hai cho $\frac{3}{2}$.

Bấm

$$\left(-\frac{\pi}{12}+i\times 2\pi\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)$$

Vậy họ nghiệm thứ hai là

$$x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}.$$

=, máy hiện

$$-\frac{1}{18}\pi+\frac{4}{3}\pi i$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{4\pi}{3},\\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right.$$

Nhớ ghi điều kiện của k.

$(k\in\mathbb{Z})$.

2.2 Tiểu kết

Khi giải tự luận phương trình (1), ta có thể dùng hàm $Pol($, lượng giác ngược và gán $k=i$ để hỗ trợ như sau

2.2.1 Giải theo sine

Trong MODE 1, nhập $Pol(S,C)$ =[†], khi đó

$$\begin{aligned}(1)\Leftrightarrow & X\sin(u+Y)=m\\ \Leftrightarrow & \sin(u+Y)=\frac{m}{X}.\end{aligned}$$

Bấm máy $\sin^{-1}\left(\frac{m}{X}\right)$ = máy hiện góc φ, từ đây ta có

$$\Leftrightarrow\sin(u+Y)=\sin\varphi.$$

Tiếp đến, ta vận dụng công thức nghiệm phương trình lượng giác cơ bản của hàm sine

$$\sin u=\sin v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=v+k2\pi,\\ u=\pi-v+k2\pi, \end{array}\right.$$

để dẫn đến kết quả cuối cùng. Chú ý rằng có thể gán $k=i$ trong MODE 2 để biến đổi nhanh cho k.

[†] Giải theo sine thì nhập hệ số của sin trước.

2.2.2 Giải theo cosine

Trong MODE 1, nhập $Pol(C, S)$ = [‡], khi đó

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow & X\cos(u - Y) = m \\ \Leftrightarrow & \cos(u - Y) = \frac{m}{X}.\end{aligned}$$

Bấm máy $\cos^{-1}\left(\frac{m}{X}\right)$ = máy hiện góc φ,

$$\Leftrightarrow \cos(u - Y) = \cos\varphi.$$

Tiếp đến, ta vận dụng công thức nghiệm phương trình lượng giác cơ bản đối với hàm cosine

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi, \\ u = -v + k2\pi, \end{array}\right.$$

để dẫn đến kết quả cuối cùng (có thể gán $k = i$ nếu cần biến đổi nhanh cho k).

3 Định hướng bán tự luận

Ví dụ 2. *Điền khuyết*

Phương trình

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

có hai họ nghiệm là $x = \ldots$
và $x = \ldots$

3.1 Lời giải

3.1.1 Giải bằng công thức nghiệm

1. Trong MODE 1, bấm $Pol\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ =;
2. Vì có $\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}$ nên ta gán $\frac{3}{2} \to A$, $\frac{\pi}{3} \to B$;
3. Qua MODE 2, nhập vào màn hình

$$\left(i \times 2\pi + \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{X}\right) + Y - B\right) \div A$$

bấm =, máy hiện $\frac{1}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi i$.

[‡] Giải theo cosine thì nhập hệ số của cos trước.

4. Sửa màn hình thành
$$\left(i \times 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{X}\right) + Y - B\right) \div A$$
bấm ⊟, máy hiện $-\frac{1}{18}\pi + \frac{4}{3}\pi i$.

Vậy hai họ nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3}$ và $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3.1.2 Giải theo Newton-Raphson

1. Tính chu kì
   - Xét $\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}$, ta có $a = \frac{3}{2}$.
   - Chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$.
2. Tìm khoảng chứa nghiệm
   - Trong MODE 1, nhập vào màn hình
   $$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3}$$
   - Thực hiện CALC $X = 0; 1; 2; 3; 4$ ta thấy $f(0)$ và $f(1)$ trái dấu nên phương trình có nghiệm trong $(0; 1)$; đồng thời $f(4) \approx -0.04 \approx 0$ nên phương trình có nghiệm gần với 4.
3. Tìm một nghiệm trong mỗi họ nghiệm
   - Bấm SHIFT CALC (SOLVE) tại $X = 0.5$[§] máy hiện $X = 0.5235987756$. Gán giá trị này vào biến nhớ A. Bấm $A \div \pi$ ⊟ ta được 0.1666666667. Nhập 0.16666666666667 ⊟, máy hiện $\frac{1}{6}$. Vậy $x_1 = \frac{\pi}{6}$.
   - Bấm SHIFT CALC (SOLVE) tại $X = 4$, máy hiện $X = 4.01425728$. Gán giá trị này vào biến nhớ B ta có $x_2 = \frac{23\pi}{18}$.
   - Kiểm tra $\frac{A - B}{\frac{4\pi}{3}}$ ⊟ $-0.8333333333 \notin \mathbb{Z}$ nên x_1 và x_2 thuộc hai họ nghiệm khác nhau.
4. Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3}$ và $x = \frac{23\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý Có thể chuẩn hóa họ $x = \frac{23\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}$ không vượt quá nửa chu kỳ bằng cách SHIFT CALC (SOLVE) phương trình
$$\frac{23\pi}{18} + X \times \frac{\frac{4\pi}{3}}{2}$$

§ Là trung điểm của $(0; 1)$.

để được nghiệm X. Sau đó sửa màn hình thành[¶]

$$\frac{23\pi}{18} + Intg(X) \times \frac{\frac{4\pi}{3}}{2}$$

bấm [=] ta được $-\frac{1}{18}\pi$.

Vậy dạng chuẩn hóa nửa chu kỳ của họ $x = \frac{23\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}$ là $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}$.

3.2 Tiểu kết

Khi điền khuyết hai họ nghiệm của phương trình (1), ta có thể dùng công thức nghiệm (thiết lập bằng kết quả của $Pol($, lượng giác ngược và gán $k = i$) hoặc phương pháp Newton-Raphson (với chu kỳ T) như sau

3.2.1 Giải bằng công thức nghiệm

Kết luận 2.2 cho thấy dù giải theo sine hay cosine thì họ nghiệm thu được cũng giống nhau. Theo chúng tôi, biến đổi nghiệm theo cosine dễ thao tác với máy hơn, và do đó, công thức giải nhanh phương trình (1) sẽ được thiết lập theo cosine. Quy trình tương ứng gồm có 4 bước

1. Trong [MODE] [1], bấm $Pol(C, S)$ [=];
2. Gán $a \to A$, $b \to B$[‖];
3. Qua [MODE] [2], nhập vào màn hình[**]

$$\left(i \times 2\pi + \cos^{-1}\left(\frac{\text{Vế phải}}{X}\right) + Y - B\right) \div A$$

   bấm [=], ghi nhận họ nghiệm thứ nhất.

4. Sửa màn hình thành

$$\left(i \times 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\text{Vế phải}}{X}\right) + Y - B\right) \div A$$

   bấm [=], ghi nhận họ nghiệm thứ hai.

3.2.2 Giải theo Newton-Raphson

Nếu không muốn nhớ công thức, ta có thể dùng phương pháp Newton-Raphson để xác định một nghiệm trong mỗi họ, sau đó cộng thêm bội nguyên của chu kỳ để được họ nghiệm hoàn chỉnh. Quy trình của chiến lược này được chúng tôi đề xuất theo 4 bước sau đây

1. Tính chu kì $T = \frac{2\pi}{a}$.

[¶] Bấm [ALPHA] [−] để có $Intg($.

[‖] Có thể bỏ qua khi $a = 1$ và $b = 0$.

[**] Đối với phương trình (1) thì m là "vế phải".

2. Tìm khoảng chứa nghiệm
   - Trong MODE 1, nhập Vế trái(1) – Vế phải(1) vào màn hình;
   - Thực hiện CALC $X = 0; 1; \ldots$ để tìm khoảng chứa nghiệm.
3. Tìm một nghiệm trong mỗi họ nghiệm
   - Bấm SHIFT CALC (SOLVE) tại $X =$ trung điểm khoảng chứa nghiệm thứ nhất để tìm nghiệm x_1 trong họ nghiệm thứ nhất;
   - Bấm SHIFT CALC (SOLVE) tại $X =$ trung điểm khoảng chứa nghiệm thứ hai để tìm nghiệm x_2 trong họ nghiệm thứ hai;
4. Kết luận

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 + kT, \\ x = x_2 + kT. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ có $f(x_0') \approx 0$ thì x_0' gần nghiệm x_0 của $f(x)$;
2. Nếu hàm số liên tục $y = f(x)$ có $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì hàm số ấy có nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
3. Hai nghiệm x_1 và x_2 thuộc hai họ nghiệm khác nhau nếu $\dfrac{x_1 - x_2}{T} = \ell \notin \mathbb{Z}$.
4. Để chuẩn hóa nghiệm x_1' (trong họ nghiệm $x = x_1' + kT$) thành x_1 để nó không vượt quá một nửa chu kỳ, ta giải phương trình sau theo ẩn k

$$x_1' + k\frac{T}{2}.$$

Khi đó, $x_1 = x_1' + [k]\dfrac{T}{2}$ với hàm [ ] trong máy là $Intg()$.

4 Định hướng trắc nghiệm

4.1 Hoài cổ tự luận

Ví dụ 3. Cho phương trình

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}. \qquad (3)$$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

Ⓐ $(3) \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⓑ $(3) \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $(3) \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⓓ $(3) \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Chọn đáp án Ⓒ

4.1.1 Lời giải chi tiết 1

Sử dụng *Pol(* và giải theo sine như mục 2.1.1 ta được

$$(3) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

nên loại hai phương án A, B theo sine đồng thời cũng loại phương án D theo cosine.

4.1.2 Lời giải chi tiết 2

Sử dụng *Pol(* và giải theo cosine như mục 2.1.2 ta được

$$(3) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.2 Trắc nghiệm giai đoạn sơ khai

Ví dụ 4. Cho phương trình

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}. \tag{4}$$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

Ⓐ $(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2011\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{2015\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓑ $(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2017\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{2021\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓒ $(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2017\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{2023\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3}. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ⓓ $(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2017\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{2015\pi}{18} + k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải. Chọn đáp án Ⓓ

Lời giải chi tiết

Nhập vào màn hình

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3}$$

lần lượt CALC $X = \frac{2011\pi}{18}; \frac{2015\pi}{18}$[††] ta loại ngay phương án A (vì kết quả khác 0) và chọn được phương án D (do kết quả $-5.09 \cdot 10^{-12} \approx 0$).

[††] Các nghiệm đại diện trong phương án.

4.3 Trắc nghiệm giai đoạn hiện nay

Ví dụ 5. Cho phương trình

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}. \qquad (5)$$

Số nghiệm của phương trình (5) trên $[0;4\pi]$ là

Ⓐ 5 nghiệm. Ⓑ 6 nghiệm. Ⓒ 7 nghiệm. Ⓓ 8 nghiệm.

Lời giải. Chọn đáp án Ⓑ

Lời giải chi tiết

Vận dụng chiến lược giải ở mục 3 ta được

$$(5) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x_k &= \frac{\pi}{6}+k\frac{4\pi}{3}, \\ x_\ell &= -\frac{\pi}{18}+\ell\frac{4\pi}{3}. \end{aligned}\right. \qquad (k,\ell\in\mathbb{Z})$$

Dễ thấy $-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{6}$ nên họ $x_\ell < x_k$, tức là x_ℓ trước, x_k sau.

Vì điều kiện $x\in[0;4\pi]$ nên bài toán trở thành đếm số giá trị của

$$\begin{aligned} f(\ell) &= -\frac{1}{18}+\ell\frac{4}{3}, \\ g(k) &= \frac{1}{6}+k\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

trên $[0;4]$.

Vào MODE 7, nhập

$$\begin{aligned} f(X) &= -\frac{1}{18}+X\times\frac{4}{3} \\ g(X) &= \frac{1}{6}+X\times\frac{4}{3} \end{aligned}$$

và cho X chạy từ Start = 0 đến End = 5, bước nhảy Step = 1. Số giá trị thuộc $[0;4]$ trong bảng kết quả chính là đáp số cần tìm.

4.4 Tiểu kết

Với hình thức trắc nghiệm, học sinh có dịp vận dụng nhiều kỹ thuật được hình thành khi giải quyết bài toán ở dạng tự luận và bán tự luận. Ngoài ra, các em còn có thể sử dụng các phương án như một phần giả thiết, và từ đó, việc thay chúng vào phương trình để kiểm tra tính đúng/sai cũng là một chiến lược hữu ích trong một số tình huống nhất định. Tuy nhiên, để hạn chế chiến lược này, Ví dụ 4 được phát triển thành Ví dụ 5 bằng việc đổi yêu cầu thành đếm số nghiệm của phương trình trong một khoảng (đoạn, nửa khoảng) cho trước. Đây là hướng nghiên cứu mà chúng tôi quan tâm trong thời gian tới.

5 Kết luận

Tùy vào hình thức kiểm tra đánh giá và mức độ phức tạp của đề bài mà việc sử dụng máy tính cầm tay sẽ hỗ trợ một phần hoặc toàn bộ quá trình tìm ra phương án.

Với dạng thức điền khuyết, tối ưu hóa con đường tự luận bằng cách dùng công thức hệ quả là một hướng tiếp cận an toàn nhưng tạo thêm áp lực ghi nhớ cho người học. Ở một phương diện khác, phương pháp Newton-Raphson có vẻ như khắc phục hoàn toàn hạn chế nói trên lại đòi hỏi tư duy linh hoạt trong xử lý khoảng chứa nghiệm - vốn còn khá lạ lẫm với đa số học sinh đại trà.

Ở những câu hỏi trắc nghiệm khó, thí sinh cần trang bị thêm kỹ năng chuẩn hóa họ nghiệm và loại bỏ các nghiệm thuộc cùng một họ để vượt qua phương án nhiễu và xác định phương án đúng. Bên cạnh đó, năng lực "quy lạ về quen" cũng là cứu cánh trước những dạng bài tập mà các em chưa gặp bao giờ, vì thế cần phải tôi luyện kỹ.

Nhìn chung, học sinh nên cân nhắc việc sử dụng máy tính cầm tay một cách hợp lý, tránh phụ thuộc hoàn toàn vào công cụ này. Đồng thời giáo viên cũng cần quan tâm đúng mức đến vấn đề tối ưu hóa cách giải tự luận theo định hướng trắc nghiệm khách quan nhằm đáp ứng thực tiễn bối cảnh hiện nay.

6 Hướng nghiên cứu tiếp theo

Tìm số nghiệm trên $(a;b)$ ($[a;b]$, $(a;b]$ hay $[a;b)$) của phương trình lượng giác thuộc một trong ba dạng

1. $f(x) = 0$;
2. $f(x) \cdot g(x) = 0$ (tăng nghiệm);
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ (giảm nghiệm).



Ghi chú Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng CASIO fx-570VN Plus và VINACAL 570ES Plus II.

Tài liệu

[1] Lê Hồng Đức, Đào Thiện Khải (2010), *Giải toán trên máy tính CASIO fx-570MS lớp 10-11-12*, NXB. Đại học Sư phạm, Tiền Giang.